

Л 12. Интегрирование некоторых тригонометрических функций

Интегрирование простейших дробей Интегрирование рациональных функций

Интегрирование некоторых иррациональных функций

1. Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен

Здесь мы рассмотрим метод нахождения интегралов вида

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c} dx \quad \text{и} \quad \int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx.$$

1°. Выносим из квадратного трехчлена ax^2+bx+c коэффициент a и выделяем в нем полный квадрат следующим образом

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right) = \\ &= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+k^2\right) \end{aligned}$$

где $k = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}$.

2°. Делаем в интеграле замену переменной $x + \frac{b}{2a} = t$, $dx = dt$, в результате

он приводится к виду $\int \frac{m_1t+n_1}{t^2 \pm k^2} dt$ или $\int \frac{m_1t+n_1}{\sqrt{\pm t^2 \pm k^2}} dt$.

3°. Записываем интеграл в виде суммы двух интегралов в соответствии с двумя слагаемыми числителя. В первом интеграле делаем замену переменной $t^2 \pm k^2 = u$. В результате оба слагаемых - табличные интегралы

2 Интегрирование рациональных функций Самый важный класс функций, интегралы от которых всегда выражаются через элементарные функции, представляют рациональные функции: $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x), Q(x)$ -

многочлены

Если рациональная дробь неправильная, то с помощью деления $P(x)$ на $Q(x)$ можно выделить из нее целую часть и правильную рациональную дробь. Например;

$$\frac{x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 1}{x^2 - x + 1} = x^2 - 3x - 2 + \frac{x+1}{x^2 - x + 1}$$

Далее рассматриваем интегрирование только правильных рациональных дробей (т.е. дробей у которых степень многочлена в числителе ниже степени многочлена в знаменателе).

Теорема. Каждая правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы конечного числа следующих четырех типов:

1°. $\frac{A}{x-a};$

2°. $\frac{A}{(x-a)^k} \quad (k=2,3,4,...);$

3°. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q};$

40. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$; ($k=2,3,4,\dots$), где A B – числовые коэффициенты

трехчлен x^2+px+q не имеет вещественных корней (т.е. $D=\frac{p^2}{4}-q<0$).

Рассмотрим интегрирование простых дробей

1°. $\int \frac{Adx}{x-a} = A \ln|x-a| + C$;

2°. При $k>1$ $\int \frac{Adx}{(x-a)^k} = A \int (x-a)^{-k} dx = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C$.

3°. Метод интегрирования дроби $y=x^2$ был рассмотрен выше.

4°. Рассмотрим метод нахождения интегралов вида $y=\sqrt{x}$, где $k>1$ и дискриминант квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе $D=p^2-4q<0$.

Выделив в квадратном трехчлене полный квадрат и сделав замену переменной $x+\frac{p}{2}=t$, $dx=dt$, получим интеграл вида $\int \frac{At+B_1}{(t^2+m^2)^k} dt$, в котором

первое слагаемое интегрируется путем внесения t под знак дифференциала:

$$\int \frac{t}{(t^2+m^2)^k} dt = \frac{1}{2} \int (t^2+m^2)^{-k} d(t^2+m^2) = \frac{1}{2} \frac{(t^2+m^2)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{(x^2+px+q)^{-k+1}}{-k+1} + C.$$

Найдем интеграл $I_k = \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k}$ путем сведения его к интегралам того же вида с меньшим k следующим образом

$$\begin{aligned} I_k &= \frac{1}{m^2} \int \frac{(t^2+m^2)-t^2}{(t^2+m^2)^k} dt = \frac{1}{m^2} \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} - \frac{1}{m^2} \int \frac{t^2}{(t^2+m^2)^k} dt = \\ &\quad [a,b] \\ &= \frac{1}{m^2} I_{k-1} - \frac{1}{2m^2} \int t d \frac{(t^2+m^2)^{-k+1}}{-k+1} = \left| u=t, v=\frac{(t^2+m^2)^{-k+1}}{-k+1} \right| = \frac{1}{m^2} I_{k-1} - \\ &\quad - \frac{1}{2m^2(1-k)} \left(\frac{t}{(t^2+m^2)^{-k+1}} - I_{k-1} \right). \end{aligned}$$

Применяя этот процесс к I_{k-1} получим, что нахождение этого интеграла сводится в конечном счете к интегралу $I_1 = \int \frac{dt}{t^2+m^2} = \frac{1}{m} \operatorname{arctg} \frac{t}{m} + C$.

Рассмотрим вопрос о разложении рациональных дробей на простые дроби. В алгебре известно, что всякий многочлен с вещественными коэффициентами степени выше второй разлагается единственным образом на линейные и квадратичные множители с вещественными коэффициентами.

Пусть многочлен $Q(x)$ разложен на множители в следующем виде:

$$Q(x) = a_0(x-a_1)^{k_1} \cdot (x-a_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x-a_s)^{k_s} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{n_1} \cdot \dots \cdot (x^2+p_mx+q_m)^{n_s}$$

Например: 1) $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$;

2) $x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$;

3) $x^3+x^2-2x=x(x-1)(x+2)$.

В алгебре устанавливается что:

1). Каждому неповторяющемуся множителю вида $x-a$ соответствует в разложении одна простая дробь вида $\frac{A}{x-a}$. 2). Каждому множителю вида

$(x-a)^k$ соответствует сумма k простых дробей вида $\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$.

3). Неповторяющемуся множителю $x^2 + px + q$ соответствует одна простая дробь вида $\frac{Mx + N}{x^2 + px + q}$. 4). Каждому множителю вида $(x^2 + px + q)^n$

соответствует сумма n простых дробей вида

$$\frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{M_nx + N_n}{(x^2 + px + q)^n}.$$

Здесь A, M, N, A_i, M_i, N_i - неизвестные числовые коэффициенты. Неизвестные коэффициенты можно определить двумя методами. Рассмотрим эти методы.

Метод частных значений. Этот метод основан на подборе частных значений x так, чтобы появилось одно уравнение с одним неизвестным коэффициентом. Метод применяется для случая, когда многочлен в знаменателе имеет только простые вещественные корни. Рассмотрим метод неопределенных коэффициентов. Правильную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$

запишем в виде суммы простых дробей, приведем к общему знаменателю. Затем отбрасываем знаменатель в обеих частях равенства и получим равенство двух многочленов. Это равенство должно быть тождественным, поэтому коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях должны быть равны. Получим систему n линейных уравнений с неизвестными. Из этой системы определяются неизвестные коэффициенты.

Интегрирование некоторых иррациональных функций

1. Интегралы вида $\int R\left(x, x^{\frac{p_1}{q_1}}, x^{\frac{p_2}{q_2}}, \dots, x^{\frac{p_n}{q_n}}\right) dx$

2. Рассмотрим нахождение интегралов вида $\int R\left(x, x^{\frac{p_1}{q_1}}, x^{\frac{p_2}{q_2}}, \dots, x^{\frac{p_n}{q_n}}\right) dx$, где

$R(\dots)$ рациональная функция, т.е. отношение двух многочленов, содержащих переменную x и степенные функции вида $x^{\frac{p_i}{q_i}} = \sqrt[q_i]{x^{p_i}}$. Обозначим через k - наименьший общий знаменатель дробей $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_n}{q_n}$ и сделаем в исходном интеграле замену переменной $x = t^k$, $dx = kt^{k-1}dt$.

3. В результате получим интеграл от рациональной функции переменной t

$$\int R\left(t^k, t^{\frac{kp_1}{q_1}}, t^{\frac{kp_2}{q_2}}, \dots, t^{\frac{kp_n}{q_n}}\right) kt^{k-1} dt.$$

Поскольку все числа $\frac{kp_i}{q_i}$ - целые, как было отмечено выше, такой интеграл всегда находится в элементарных функциях.

Интегралы вида $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right) dx$, где $R(\dots)$ - рациональная функция, с помощью замены переменной $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, где k - наибольший знаменатель дробей $\left(\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_n}{q_n}\right)$, также сводятся к интегралам от рациональных функций.

Интегрирование некоторых тригонометрических функций. В этом пункте мы рассмотрим нахождение интегралов вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$, где $R(u, v)$ - рациональная функция относительно u, v .

Проверим, что такие интегралы с помощью универсальной замены переменной $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ всегда сводятся к интегралам от рациональных функций.

В результате получаем, что

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t) dt$$

где $R_1(t)$ - рациональная функция.

Хотя данный метод формально может быть применен к любым указанным интегралам, в случаях, когда функция содержит переменные $\sin x$ или $\cos x$ в степени выше первой, часто получаются достаточно громоздкие выражения. В этих случаях разумнее применять следующие методы

1°. Если подынтегральная функция является нечетной по косинусу, т.е. если

$$R(\sin x, -\cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x),$$

то она может быть преобразована к виду $R(\sin x, \cos x) = R_1(\sin x) \cdot \cos x$, после чего в интеграле делается замена переменной $\sin x = t$ и он сводится к интегралу от рациональной функции

$$R_1(t): \int R_1(\sin x) \cos x dx = |\sin x = t| = \int R_1(t) dt.$$

2°. Если подынтегральная функция является нечетной по синусу, т.е.

$$R(-\sin x, \cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x),$$

то она может быть преобразована к виду $R(\sin x, \cos x) = R_1(\cos x) \sin x$ и после замены переменной $\cos x = t$ интеграл сводится к интегралу от рациональной функции

$$R_1(t): \int R_1(\cos x) \sin x dx = |\cos x = t| = -\int R_1(t) dt$$

3°. Если подынтегральная функция удовлетворяет условию

$$R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x),$$

то она может быть преобразована к виду $R(\sin x, \cos x) = R_1(\operatorname{tg} x)$, после чего в интеграле делается замена $\operatorname{tg} x = t$, $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, и он сводится к интегралу от рациональной функции.

4°. Интегралы типа $\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \cos mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$, где m, n — постоянные числа.

Подынтегральные функции приводятся к сумме первых степеней синусов и косинусов с помощью формул:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)),$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)),$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

5°. Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$, где m, n — любые целые показатели.

Пример

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^2 x dx &= \int \frac{(1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x)}{4} dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos^2 2x) dx = \\ &= \frac{1}{4} \int \left(1 - \frac{1 + \cos 4x}{2}\right) dx = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4x\right) dx = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{8} \sin 4x\right) + C. \end{aligned}$$

Пример Найдём интеграл $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$, записав его в виде

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = (Ax + B)\sqrt{x^2 + 1} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Для нахождения чисел A, B, λ продифференцируем получившиеся равенство, получим

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} = A\sqrt{x^2 + 1} + (Ax + B) \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Умножим обе части равенства на $\sqrt{x^2 + 1}$

$$x^2 = A(x^2 + 1) + (Ax + B) \cdot 2x + \lambda, \quad x^2 = Ax^2 + A + 2Ax^2 + 2Bx + \lambda,$$

$$x^2 = 3Ax^2 + 2Bx + A + \lambda.$$

Приравняв коэффициенты при x^2, x, x^0 в левой и правой частях равенства, получим систему уравнений

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 1 = 3A \\ x & 0 = 2B \\ x^0 & 0 = A + \lambda. \end{array}$$

Отсюда $A = \frac{1}{3}$, $B = 0$, $\lambda = -\frac{1}{3}$. Следовательно,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \frac{1}{3} x \sqrt{x^2 + 1} - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{3} x \sqrt{x^2 + 1} - \frac{1}{3} \ln |x + \sqrt{x^2 + 1}| + C.$$

